Solution

Partie I

1. (a) i. Soit $P \in E$. Montrons que $\Delta(P)$ est une fonction polynôme et que $\deg \Delta(P) = -\infty$ si $\deg P \leqslant 0$ et $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ sinon.

– Si $\deg P \leqslant 0$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \lambda$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(P)(x) = \lambda - \lambda = 0$$

Donc $\Delta(P)$ est la fonction polynôme nulle, donc $\deg \Delta(P) = -\infty$.

– Sinon, en notant $n = \deg P$, il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(P)(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[(x+1)^k - x^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i\right) - x^k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i\right) \\
&= \underbrace{a_n \binom{n}{n-1}}_{= n a_n \neq 0} x^{n-1} + \underbrace{a_n \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} x^i + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i}_{\deg \leqslant n-2}
\end{aligned}$$

Donc $\Delta(P)$ est une fonction polynôme de degré $n-1$.

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\Delta(P) \text{ est une fonction polynôme. De plus :} \\
\qquad \deg \Delta(P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P \leqslant 0 \\ \deg P - 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
\text{De plus, si } n = \deg P \geqslant 1 \text{ et } a_n \text{ est le coefficient dominant de} \\
P\text{, le coefficient dominant de } \Delta(P) \text{ est } n a_n
\end{array}}$$

ii. Nous savons que Δ est linéaire. Il reste à montrer que :

$$\forall P \in E_n \quad \Delta(P) \in E_n$$

Or la question précédente nous montre que si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg \Delta(P) \leqslant n$.

En conclusion :

$$\boxed{\Delta \text{ induit un endomorphisme de } E_n \text{ que l'on notera désormais } E_n.}$$

(b) i. Soit $P \in E_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker} \Delta_n &\iff \Delta(P) = 0 \\
&\iff \deg \Delta(P) = -\infty \\
&\iff \deg P \leqslant 0 \quad \text{d'après la question 1.a.i} \\
&\iff P \in E_0
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} \Delta_n = E_0}$$

ii. D'après le théorème du rang :

$$\dim E_n = \dim \operatorname{Im} \Delta_n + \dim \operatorname{Ker} \Delta_n$$

Or $\dim E_n = n + 1$ et $\dim \operatorname{Ker} \Delta_n = \dim E_0 = 1$. Donc :

$$\boxed{\operatorname{rg} \Delta_n = \dim \operatorname{Im} \Delta_n = n}$$

D'après la question 1.a.i, $\operatorname{Im} \Delta_n \subset E_{n-1}$. Comme ces deux espaces vectoriels sont de même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux. En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Im} \Delta_n = E_{n-1}}$$

2. (a) i. Soit $k \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta\left(N_k\right)(x) \\
= \; & N_k(x+1) - N_k(x) \\
= \; & \frac{(x+1)\,x\,(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} - \frac{x\,(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \\
= \; & \frac{x\,(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} \underbrace{\left((x+1)-(x-k+1)\right)}_{=k} \\
= \; & \frac{x\,(x-1)\cdots(x-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
= \; & N_{k-1}(x)
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \geqslant 1 \quad \Delta\left(N_k\right) = N_{k-1}}$$

ii. Montrons la propriété suivante par récurrence sur j :

$$\mathcal{P}_j : \text{« } \forall k \in \mathbb{N} \quad \Delta^j\left(N_k\right) = \begin{cases} N_{k-j} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ »}$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie. (immédiat)
- $\mathcal{P}_j \Longrightarrow \mathcal{P}_{j+1}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_j$ est vraie. Montrons qu'il en est de même pour $\mathcal{P}_{j+1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
  - Si $j \leqslant k$. Puisque $\mathcal{P}_j$ est vraie, on en déduit que $\Delta^j\left(N_k\right) = N_{k-j}$. Donc :

    $$\Delta^{j+1}\left(N_k\right) = \Delta\left(\Delta^j\left(N_k\right)\right) = \Delta\left(N_{k-j}\right)$$

    - Si $k-j \geqslant 1$, c'est-à-dire si $j+1 \leqslant k$, $\Delta\left(N_{k-j}\right) = N_{k-j-1} = N_{k-(j+1)}$.
    - Sinon, $N_{k-j} = N_0$ donc $\Delta_{N_{k-j}} = 0$ donc $\Delta^{j+1}\left(N_k\right) = 0$.
  - Sinon, $\Delta^j\left(N_k\right) = 0$ donc $\Delta^{j+1}\left(N_k\right) = 0$.

  Donc $\mathcal{P}_{j+1}$ est vraie.

Par récurrence sur j on en déduit que $\mathcal{P}_j$ est vrai quelque soit $j \in \mathbb{N}$. En conclusion :

$$\boxed{\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \Delta^j\left(N_k\right) = \begin{cases} N_{k-j} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Remarquons que $N_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$ et $N_0(0) = 1$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall j, k \in \mathbb{N} \quad \left(\Delta^j\left(N_k\right)\right)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(b) i. Montrons que la famille $N_0, \ldots, N_n$ est une base de E_n. Puisque cette famille possède $n+1$ éléments et que $\dim E_n = n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre.
Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_0 N_0 + \cdots + \lambda_n N_n = 0$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Alors en appliquant Δ^j à l'égalité précédente et en évaluant en 0, on obtient (d'après la question précédente) $\lambda_j = 0$. La famille $N_0, \ldots, N_n$ est donc libre. En conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } N_0, \ldots, N_n \text{ est une base de } E_n.}$$

ii. Soit $P \in E_n$. Puisque $N_0, \ldots, N_n$ est une base de E_n, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = a_0 N_0 + \cdots + a_n N_n$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Alors, en appliquant Δ^j puis en évaluant en 0 l'égalité précédente, on obtient (toujours d'après la question 2.a.ii) $a_j = \left(\Delta^j(P)\right)(0)$. En conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!] \quad a_j = \left(\Delta^j(P)\right)(0)}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Alors, une récurrence immédiate sur k nous montre que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(T^k(f)\right)(x) = f(k+x)}$$

(b) Soit $j \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$.

i. Puisque T et Id commutent dans $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, on en déduit en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\Delta^j &= \left(T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}\right)^j \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} T^k \left(-\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}\right)^{j-k} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} T^k
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta^j(f) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} T^k(f)$$

D'après la question précédente, on en déduit finalement que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\Delta^j(f)\right)(x) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(x+k)}$$

ii. D'après la question précédente :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\Delta^j(f)\right)(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(k) \\ \text{En particulier, } \left(\Delta^j(f)\right)(0) \text{ ne dépend que des valeurs de } f \text{ aux} \\ \text{points } 0, 1, \ldots, j. \end{array}}$$

Partie II

1. (a) Montrons que Φ est un isomorphisme.
   - Φ est linéaire (évident).
   - Φ est injective. En effet, montrons que $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$. Soit $P \in E_n$ tel que $\Phi(P) = (0, \ldots, 0)$. Alors :

   $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(k) = 0$$

   Donc P admet $n+1$ racines 2 à 2 distinctes. Puisque $\deg P \leqslant n$, on en déduit que $P = 0$.

   Puisque $\dim E_n = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ $(= n+1)$ et que Φ est injective, on en déduit que Φ est un isomorphisme. En conlusion :

   $$\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } E_n \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1}.}$$

   (b) L'existence d'une solution au problème $\mathcal{P}$ découle de la surjectivité de Φ et son unicité découle de l'injectivité de Φ. La question précédente permet donc de conclure :

   $$\boxed{\text{Le problème } \mathcal{P} \text{ posséde une unique solution } \mathcal{P}_f.}$$

2. (a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. D'après la question 3.b.ii :

   $$\begin{aligned} \left(\Delta^j(f)\right)(0) &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} f(k) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} P_f(k) \quad \text{car } P_f \text{ est solution du problème } \mathcal{P} \\ &= \left(\Delta^j(P_f)\right)(0) \end{aligned}$$

   En conclusion :

   $$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!] \quad \left(\Delta^j(f)\right)(0) = \left(\Delta^j(P_f)\right)(0)}$$

   (b) D'après la question 2.b.ii :

   $$P_f = \sum_{j=0}^{n} \left(\Delta^j(P_f)\right)(0)\, N_j$$

   On en déduit donc, d'après la question précédente :

   $$\boxed{P_f = \sum_{j=0}^{n} \left(\Delta^j(f)\right)(0)\, N_j}$$