JE M'ENTRAÎNAIS

1°) Supp. que (U_n) converge, et soit l sa limite.

M. que (U_n) est une suite de Cauchy :

Soit $\varepsilon > 0$.

$\lim_{n} U_n = l \Rightarrow \left(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right)$

Alors : $(\forall p \geq N, \forall q \geq N$, on a $|U_p - U_q| = |U_p - l + l - U_q| \leq \underbrace{|U_p - l|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|U_q - l|}_{\leq \varepsilon/2}$

D'où : $\forall p \geq N, \forall q \geq N, |U_p - U_q| \leq \varepsilon$

C/c : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \text{ on a } |U_p - U_q| \leq \varepsilon}$

càd (U_n) suite de ~~Cauchy~~ Cauchy

2°) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$, car $\left(\forall_{n+1 \leq k \leq 2n}, \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}\right)$

$\Rightarrow H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2n} \cdot (2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}$

3°) Pour montrer que $(H_n)_{n \geq 1}$ n'est pas de Cauchy, on montre que :

$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, \exists q \geq N, |U_p - U_q| > \varepsilon}$

Le $\varepsilon > 0$ qui va exister est par exemple $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour $p = 2N$ et $q = N$, on a :

$|U_p - U_q| = |U_{2N} - U_N| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4} (= \varepsilon)$.

4°) Supp. que (H_n) converge. Soit L sa limite

2°/ $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \; H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

alors par passage à la limite, et puisque $\lim_n H_{2n} = \lim_n H_n = \ell$

on aura : $0 \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde

D'où (U_n) diverge

5) a°) $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

D'où $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante

b°) On a (H_n) est croissante et diverge

donc $\lim_n H_n = +\infty$

6°) a°) Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

f est bien dérivable sur $]-1,+\infty[$, donc :

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \; f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

et on tire d'après ce tableau que : $\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[, \; f(x) \geq 0}$

c-à-d : $\boxed{\forall x > -1, \; x \geq \ln(1+x)}$

b°) $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{a°}{\geq} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right)}_{\text{somme télescopique}} = \ln(n+1)$

c°) or $\lim_n \ln(n+1) = +\infty$ et $(\forall n \geq 1, \; H_n \geq \ln(n+1))$ alors $\lim_n H_n = +\infty$