Solution

A- Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A-1) $f(0)$ existe et pour $x \neq 0$, $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$. Donc,

$$\boxed{D = [0, 1[\cup]1, +\infty[.}$$

A-2) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\ln(x)} = 0$. Par suite, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = o(x) = f(0) + 0x + o(x)$. f admet un développement limité d'orde 1 en 0 et est donc dérivable en 0, et en particulier continue en 0. De plus, $f'(0) = 0$.

A-3) f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0, 1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$ et pour $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$. Quand x tend vers 0, $f'(x) \sim \dfrac{\ln(x)}{\ln^2(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} \to 0 = f'(0)$. Ainsi, f' est continue en 0 ou encore

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, 1[.}$$

A-4) Sur $D \setminus \{0\}$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - 1$ et donc f' est strictement négative sur $]0, 1[\cup]1, e[$, strictement positive sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

B- Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B-1) L'étude précédente montre en particulier que f est définie sur $[e, +\infty[$ et que $f([e, +\infty[) \subset [e, +\infty[$. Puisque $v_0 = 3 \in [e, +\infty[$, par récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n$ existe et $v_n \geq e$.

B-2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a en particulier $v_n > 0$. De plus, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{\ln(v_n)} \leq 1$, car $v_n \geq e$ et donc $\ln(v_n) \geq 1$. La suite (v_n) est donc décroissante. Etant minorée par e, la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \in [e, +\infty[$.

B-3) On a vu que f' est positive sur $[e, +\infty[$. D'autre part, pour $x \in [e, +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln^2 x} + (\ln x - 1)\frac{-2}{x \ln^3 x} = \frac{1}{x \ln^3 x}(\ln x - 2(\ln x - 1)) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

Ainsi, f' est croissante sur $[e, e^2]$ et décroissante sur $[e^2, +\infty[$. Par suite, f' admet sur $[e, +\infty[$, un maximum égal à $f'(e^2) = \dfrac{2-1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$, et finalement $\boxed{\forall x \in [e, +\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}.}$

2ème issue :(Démonstration directe) dans l'expression de f'(x), poser ln(x)=t, l'inégalité voulue vient d'une identité remarquable appropriée...

B-4) **Inégalité des accroissements finis.** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $|f'|$ est majorée sur I par un certain réel M. Alors, $\forall (a,b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

B-5) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur $I = [e, +\infty[$ et $|f'|$ est majorée sur I par $\frac{1}{4}$. De plus, $v_n \in I$ et $e \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|v_{n+1} - e| = |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|.$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

Pour $n = 0$, on a $|v_0 - e| = 3 - e \leq 1 = \frac{1}{4^0}$ et l'inégalité est vraie quand $n = 0$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que $|v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. Alors, $|v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$.
On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.}$$

B-6) On a $4^5 > 1000$. Par suite, $\frac{1}{4^5} < 10^{-3}$ et donc $\frac{1}{4^{20}} < 10^{-12}$ .alors, $|v_n - e| < 10^{-12}$ pour tout n à partir de 20.

<u>C- Etude de la fonction g telle que</u> $g(x) = \frac{x^2-1}{x\ln(x)}$

C-1) Sur $D \setminus \{0\}$, g' est du signe de h. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{(-2x)(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}.$$

h' est strictement positive sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ et donc, h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus $h(1) = 0$ et donc h est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$. Ainsi, g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

C-2) Quand x tend vers 1, $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x\ln(x)} \sim \frac{2(x-1)}{1(x-1)} = 2$. Par suite, $\boxed{\lim_{x \to 1} g(x) = 2.}$

C-3) Soit $x \in D \setminus \{0\}$. $f(x) - g(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{x^2-1}{x\ln(x)} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

Cette expression est du signe de $\ln(x)$ et donc $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]1, +\infty[$ et strictement au-dessous sur $]0, 1[$.

Notons $\mathscr{A}$ l'aire à déterminer exprimée en unités d'aire. Sur $[2, e] \subset]1, +\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ et donc,

$$\mathscr{A} = \int_2^e (f(x) - g(x))\, dx = \int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\, dx = [\ln|\ln(x)|]_2^e = -\ln(\ln 2) = \ln(\frac{1}{\ln 2}).$$