Problème

Partie I

1.- Le noyau de D est constitué des fonctions f, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que $f' = 0$. $\text{Ker}(D)$ est donc l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. f est en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est un élément de E tel que $F' = f$.

Ceci montre que tout élément de E est dans $\text{Im}(D)$.

$$\boxed{\text{Ker}(D) = \{\text{fonctions constantes}\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(D) = E.}$$

2.- Soient a, b et c trois réels tels que pour tout réel t, $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$. On écrit cette égalité dans le cas particulier où $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On obtient le système

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ e^{\pi/\sqrt{3}}a + e^{-\pi/(2\sqrt{3})}b = 0 \\ e^{2\pi/\sqrt{3}}a - e^{-\pi/\sqrt{3}}c = 0 \end{cases}.$$

Mais alors $\begin{cases} c = -a \\ b = -e^{(\sqrt{3}\pi)/2}a \\ (e^{2\pi/\sqrt{3}} + e^{-\pi/\sqrt{3}})a = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

3.- Quand t tend vers 0,

$$\begin{aligned}
(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) &= a(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)) + b(1 - \frac{t}{2} + o(t))(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2))(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)) \\
&= a(1 + t + \frac{t^2}{2}) + b(1 - \frac{t}{2})(\frac{t\sqrt{3}}{2}) + c(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8})(1 - \frac{3t^2}{8}) + o(t^2) \\
&= (a + c) + (a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c)t + (\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{1}{4}c)t^2 + o(t^2)
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ est la fonction nulle, quand t tend vers 0, on a aussi

$$(af_1 + bf_2 + cf_3)(t) = 0 + 0.t + 0.t^2 + o(t^2).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on a alors

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{1}{2}c = 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{1}{4}c = 0 \end{cases}.$$

La première égalité fournit $c = -a$. La deuxième s'écrit alors $\dfrac{3}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = 0$ ou encore $b = -\sqrt{3}a$. En reportant dans la dernière équation, on obtient $(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4})a = 0$ et donc $a = 0$. Puis $b = -\sqrt{3}a = 0$ et $c = -a = 0$.

4.- Pour tout réel t, on divise les deux membres de l'égalité $af_1(t)+bf_2(t)+cf_3(t)=0$ par le réel non nul e^t. On obtient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a+b.e^{-3t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.e^{-3t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)=0 \quad (*).$$

Pour tout réel t,

$$\left|b.e^{-3t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.e^{-3t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right| \leq (|b|+|c|)e^{-3t/2}.$$

Par suite, l'expression $b.e^{-3t/2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.e^{-3t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

En passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$, on obtient alors $a=0$. Après simplification par le réel non nul $e^{-3t}2$, il reste

$$\forall t \in \mathbb{R},\ b.\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+c.\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

En évaluant en $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ et $t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient $b=c=0$.

En résumé,

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ (a.f_1+b.f_2+c.f_3=0 \Rightarrow a=b=c=0).$$

$$\boxed{\text{La famille } (f_1,f_2,f_3) \text{ est une famille libre de } E \text{ ou aussi une base de } G.}$$

5.- On a $D(f_1)=f_1$, $D(f_2)=-\frac{1}{2}f_2+\frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ et $D(f_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}f_2-\frac{1}{2}f_3$. Mais alors, pour tout réels a, b et c, on a

$$D(af_1+bf_2+cf_3)=af_1+\left(-\frac{1}{2}b-\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)f_2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b-\frac{1}{2}c\right)f_3.$$

Ainsi, l'image par D d'un élément de G est encore un élément de G et donc

$$\boxed{\text{G est stable par D.}}$$

6.- Les égalités de la question précédente fournissent immédiatement

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.}$$

7.- $M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Puis

$$M^3=M.M^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$

8.- La question 7.- montre que M est inversible et que

$$\boxed{M^{-1} = M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = {}^tM.}$$

9.- La matrice de l'endomorphisme $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible et donc

$$\boxed{\widehat{D} \text{ est un automorphisme de } G.}$$

10.- Puisque $M^{-1} = M^2$,

$$\boxed{(\widehat{D})^{-1} = \widehat{D}^2.}$$

Partie II

11.- Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, f est déjà trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit alors n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Supposons que f soit n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Puisque $f''' = f$, f''' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore f est $n+3$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{toute solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont des éléments de E).

12.- Soit P un polynôme tel que $P''' = P$. Si P n'est pas le polynôme nul, alors $\deg(P''') < \deg(P)$ et en particulier $P'' \neq P$. Réciproquement, le polynôme nul est bien solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction nulle est la seule solution polynomiale de } (\mathcal{E}).}$$

13.- A la question 7.-, on a établi que $M^3 = I_3$. On en déduit que $\widehat{D}^3 = Id_G$ ou encore la restriction de $D^3 - Id_E$ à G est nulle. Ceci montre que

$$\boxed{G \subset \mathrm{Ker}(T),}$$

ou encore toute combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

14.- Soient f une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et $g = f'' + f' + f$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g.$$

Donc g est solution de l'équation $y' = y$ sur $\mathbb{R}$.

15.- Les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^t$ où λ est une constante réelle.

16.- L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ est $z^2 + z + 1 = 0$. Cette dernière équation admet pour solutions les nombres $z_1 = j = e^{-1/2}e^{i\sqrt{3}/2}$ et $z_2 = \bar{j} = e^{-1/2}e^{-i\sqrt{3}/2}$.

On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$ est donc (f_2, f_3).

17.- Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ est bien sur la fonction $t \mapsto \dfrac{\lambda}{3}e^t$. On sait alors que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + y' + y = \lambda e^t$ sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{3}e^t + e^{-t/2}\left(A\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right),\ (\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3.$$

18.- les questions 18.- à 21.- montrent que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est une combinaison linéaire de f_1, f_2 et f_3 et donc un élément de G. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T) \subset G$, et finalement

$$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = G,}$$

ou encore les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les combinaisons linéaires de f_1, f_2 et f_3.

Fin