## $\boxed{\textbf{Partie A - Etude de } \varphi_1}$

**1.** Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Posons $P = \alpha X + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi_1(P) = \alpha(X-a)(X-b) - (X - \frac{a+b}{2})(\alpha X + \beta) = -(\alpha\frac{a+b}{2} + \beta)X + \alpha ab + \beta\frac{a+b}{2}.$$

Ceci montre que $\varphi_1(P) \in \mathbb{R}_1[X]$. Par suite, $\varphi_1$ est une application de $\mathbb{R}_1[X]$ dans lui-même.

Soient alors $(P, Q) \in (\mathbb{R}_1[X])^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(\lambda P + \mu Q) &= (X-a)(X-b)(\lambda P' + \mu Q') - (X - \frac{a+b}{2})(\lambda P + \mu Q)\\ &= \lambda\left((X-a)(X-b)P' - (X - \frac{a+b}{2})P\right) + \mu\left((X-a)(X-b)Q' - (X - \frac{a+b}{2})Q\right) = \lambda\varphi_1(P) + \mu\varphi_1(Q),\end{aligned}$$

et on a montré que

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_1[X].}$$

**2.** $\varphi_1(1) = \dfrac{a+b}{2} - X$ et $\varphi_1(X) = ab - \dfrac{a+b}{2}X$. Par suite,

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix}.}$$

**3.** $\det(M_1) = -\dfrac{(a+b)^2}{4} + ab = -\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} = -\dfrac{(a-b)^2}{4}$. Par suite,

$$\varphi_1 \text{ bijective} \Leftrightarrow \det M_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b.$$

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est bijective si et seulement si } a \neq b.}$$

**4. (a)** $\mathcal{B}$ est une famille de deux éléments de $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2. Pour vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, il suffit de vérifier que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 0 &\Rightarrow (\lambda+\mu)X - (a\lambda + b\mu) = 0\\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ a\lambda + b\mu = 0 \end{cases} \text{ (car la famille } (1, X) \text{ est libre}\\ &\Rightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ (a-b)\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 = \mu \text{ (car } a \neq b).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}$ est libre et finalement

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

**(b)** $\varphi_1(X-a) = (X-a)(X-b) - (X-a)(X - \dfrac{a+b}{2}) = (-b + \dfrac{a+b}{2})(X-a) = \dfrac{a-b}{2}(X-a)$ et en échangeant les rôles de $a$ et $b$, $\varphi_1(X-b) = \dfrac{b-a}{2}(X-b)$. Par suite,

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \dfrac{a-b}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{b-a}{2} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right).}$$

**(c)** Immédiatement

$$\boxed{P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Ensuite, on sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$. Or l'inverse de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est $\dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ et donc

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}.}$$

**(d)** Les formules de changement de bases fournissent

$$\boxed{M_1 = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} M P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}.}$$

**(e)** Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $M^p = \left(\operatorname{diag}(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2})\right)^p = \operatorname{diag}(\dfrac{(a-b)^p}{2^p}, \dfrac{(b-a)^p}{2^p})$ puis

$$\begin{aligned}
M_1^p &= P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} M^p P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{(a-b)^p}{2^p} & 0 \\ 0 & \dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a\dfrac{(a-b)^p}{2^p} & -b\dfrac{(b-a)^p}{2^p} \\ \dfrac{(a-b)^p}{2^p} & \dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a\dfrac{(a-b)^p}{2^p} + b\dfrac{(b-a)^p}{2^p} & ab(-\dfrac{(a-b)^p}{2^p} + \dfrac{(b-a)^p}{2^p}) \\ \dfrac{(a-b)^p}{2^p} - \dfrac{(b-a)^p}{2^p} & b\dfrac{(a-b)^p}{2^p} - a\dfrac{(b-a)^p}{2^p} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p}\begin{pmatrix} b-(-1)^p a & ab(1-(-1)^p) \\ -1+(-1)^p & -a+(-1)^p b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ M_1^p = \frac{(b-a)^{p-1}}{2^p}\begin{pmatrix} b-(-1)^p a & ab(1-(-1)^p) \\ -1+(-1)^p & -a+(-1)^p b \end{pmatrix}.}$$

**5. (a)** $\Gamma = \operatorname{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3)$ et donc

$$\boxed{\Gamma \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_2(\mathbb{R}).}$$

**(b)** D'après la question 4.(e), $M_1^2 = \dfrac{b-a}{4}\begin{pmatrix} b-a & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \dfrac{(b-a)^2}{4} I_2$ puis $M_1^3 = M_1^2 M_1 = \dfrac{(b-a)^2}{4} M_1$.

$$\boxed{M_1^2 = \frac{(b-a)^2}{4} I_2 \text{ et } M_1^3 = \frac{(b-a)^2}{4} M_1.}$$

**(c)** On en déduit que $\Gamma = \text{Vect}(I_2, M_1, M_1^2, M_1^3) = \text{Vect}(I_2, M_1)$. D'autre part, $M_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\dfrac{a+b}{2} \end{pmatrix}$ et en particulier, $M_1$ n'est pas une matrice scalaire ($m_{2,1} = -1 \neq 0$). On en déduit que la famille $(I_2, M_1)$ est libre et donc est une base de $\Gamma$.

$$\boxed{\text{La famille } (I_2, M_1) \text{ est une base de } \Gamma.}$$

**6.** Si $a = 4$ et $b = 2$, on a $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ puis d'après la question 5.(b), $M_1^2 = I_2$ ou encore $\varphi_1^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]}$. On sait alors que $\varphi_1$ est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ parallèlement à $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$.

La question 4.(b) montre que $\varphi_1(X-4) = X-4$ et $\varphi_1(X-2) = -(X-2)$. Le polynôme $X-4$ est donc un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ et le polynôme $X-4$ est un élément non nul de $\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$. Ces deux sous-espaces sont ainsi de dimension au moins 1. Mais ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans un espace de dimension 2. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = \dim(\text{Ker}(\varphi_1 + \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})) = 1$ puis que $(X-4)$ (resp. $(X-2)$) est une base de la droite vectorielle $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$ (resp. $\text{Ker}(\varphi_1 - \text{Id}_{\mathbb{R}_1[X]})$).

$$\boxed{\varphi_1 \text{ est la symétrie par rapport à la droite Vect}(X-4) \text{ parallèlement à la droite Vect}(X-2).}$$

## Partie B - Quelques généralités sur $\varphi_n$

**7.** Soit P in $\mathbb{R}_n[X]$. Alors le polynôme $(X-a)(X-b)P'$ est de degré au plus $n+1$ de même que le polynôme $\left(X - \dfrac{a+b}{2}\right) P$. On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$. De plus, si on note $a_n$ le coefficient de $X^n$ dans P, le coefficient de $X^{n+1}$ dans $\varphi_n(P)$ vaut $a_n(n-n) = 0$. On en déduit que $\varphi_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc que $\varphi_n$ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
La linéarité de $\varphi_n$ s'établit alors comme à la question 1. et donc

$$\boxed{\varphi_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

**8. (a)** Pour tout réel $x$, $x^2-(a+b)x+ab = (x-a)(x-b)$. Comme $\alpha = \max(a, b)$, la fonction polynôme $x \mapsto x^2-(a+b)x+ab$ ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$. $f$ est donc continue sur $]\alpha, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } ]\alpha, +\infty[.}$$

**(b)** Une primitive de $f$ sur I est $F : x \mapsto \ln(x^2 - (a+b)x + ab)$.

**(c)** Soit $y$ une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{n}{2}\frac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ y'(x) - \frac{n}{2}f(x)y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{-nF(x)/2}y'(x) - \frac{n}{2}f(x)e^{-nF(x)/2}y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (e^{-nF/2}y)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ e^{-nF(x)/2}y(x) = C \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ y(x) = Ce^{nF(x)/2} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ y(x) = C(x^2-(a+b)x+ab)^{n/2}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sur I sont les fonctions de la forme } x \mapsto C(x^2-(a+b)x+ab)^{n/2},\ C \in \mathbb{R}.}$$

**(d)** Soit $P \in \mathbb{R}_{2p}[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(\varphi_{2p}) &\Leftrightarrow (X-a)(X-b)P' - n\left(X - \frac{a+b}{2}\right)P = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x-a)(x-b)P'(x) - n\left(x - \frac{a+b}{2}\right)P(x) = 0 \text{ (car I est infini)} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ P'(x) - \frac{nx - n\dfrac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}P(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ P(x) = C(x^2 - (a+b)x + ab)^p \text{ (d'après (c))} \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ P = C(X^2 - (a+b)X + ab)^p \text{ (car I est infini).}
\end{aligned}$$

Comme $(X^2 - (a+b)X + ab)^p$ est un polynôme de degré $2p = n$ et donc un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on a montré que

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Ker}(\varphi_{2p}) = \mathrm{Vect}((X^2 - (a+b)X + ab)^p).}$$

**(e)** Comme à la question précédente, $P$ est dans $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $P(x) = C(x^2 - (a+b)x + ab)^{(2p+1)/2}$.

- Si $a = b$, ceci s'écrit $\forall x \in I,\ P(x) = C(x-a)^{2p+1}$ ou encore $P = C(X-a)^{2p+1}$. Dans ce cas, puisque $(X-a)^{2p+1}$ est bien un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \mathrm{Vect}((X-a)^{2p+1})$.
- Si $a \neq b$, ceci s'écrit $\forall x \in I,\ P(x) = C\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$. Maintenant, la fonction $x \mapsto \sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1}$ n'est pas la restriction à I d'une fonction polynôme (car par exemple $\sqrt{(x-a)(x-b)}^{2p+1} \underset{\alpha^+}{\sim} |b-a|^{(2p+1)/2}(x-\alpha)^{p+\frac{1}{2}}$ ce qui n'est vérifié par aucun polynôme). Dans ce cas, seul le polynôme nul est solution ou encore $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \{0\}$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1}) = \begin{cases} \{0\} \text{ si } a \neq b \\ \mathrm{Vect}((X-a)^{2p+1}) \text{ si } a = b \end{cases}.}$$

**Fin**