Correction de l'exercice sur les noyaux itérés

1) $K_p \subset K_{p+1}$: en effet :

$$\begin{aligned} x \in K_p &\Rightarrow u^p(x) = 0 \\ &\Rightarrow u\left(u^p(x)\right) = 0 \\ &\Rightarrow u^{p+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in K_{p+1} \end{aligned}$$

$I_{p+1} \subset I_p$: en effet :

$$\begin{aligned} x \in I_{p+1} = \operatorname{Im}(u^{p+1}) &\Rightarrow \exists t \in E \,/\, x = u^{p+1}(t) \\ &\Rightarrow x = u^p\left(u(t)\right) \\ &\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(u^p) = I_p \end{aligned}$$

2) Si E est de dimension finie et que u est injective, alors u est bijective, et donc de même pour u^p.

Alors $\ker(u^p) = K_p = \{0\}$ *et* $\operatorname{Im}(u^p) = I_p = E$

3) a) Notons $n_p = \dim(K_p)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

D'après 1) on a que : $\forall p \in \mathbb{N}, K_p \subset K_{p+1}$

D'où $\forall p \in \mathbb{N}, \dim(K_p) \le \dim(K_{p+1})$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}, n_p \le n_{p+1}$.

Ainsi, la suite $\left(n_p\right)_p$ est à **valeurs dans** $\mathbb{N}$, et est **majorée** par n=dim(E) .

Alors il est impossible que $\left(n_p\right)_p$ soit **strictement** croissante.

Donc il existe un entier p tel que $n_p = n_{p+1}$, **càd** que $K_p = K_{p+1}$.

(*__Rappel__* pour les gens qui oublient vite : si F et G sont deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$, *alors* : $\dim(F) = \dim(G) \Leftrightarrow F = G$)

Notons r le plus petit de ces entiers p.

Reste à vérifier que $r \le n$:

Par définition de r, on a :

$$\begin{cases} n_0 \prec n_1 \\ n_1 \prec n_2 \\ \quad \ldots \\ n_{r-1} \prec n_r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_0 + 1 \le n_1 \\ n_1 + 1 \le n_2 \\ \quad \ldots \\ n_{r-1} + 1 \le n_r \end{cases} \text{, en sommant et en simplifiant, on obtient} : n_0 + r \le n_r$$

Or $n_0 = 0$ *car* $u^0 = I_E$, *alors* $r \le n_r$

Et évidemment on a $n_r \le n = \dim(E)$, *d'où enfin* $r \le n$

3) b) A) $I_r = I_{r+1}$, *en effet* :

Pensons au fameux théorème du rang :

On a :

$$\begin{cases} \dim(E) = \dim(\ker(u^p)) + \dim(\mathrm{Im}(u^p)) \\ \dim(E) = \dim(\ker(u^{p+1})) + \dim(\mathrm{Im}(u^{p+1})) \end{cases}$$

Or $\dim(\ker(u^{p+1})) = \dim(\ker(u^p))$

Alors $\dim(\mathrm{Im}(u^p)) = \dim(\mathrm{Im}(u^{p+1}))$; *càd* $\dim(I_p) = \dim(I_{p+1})$

Et puisque $I_{p+1} \subset I_p$, *alors* $I_{p+1} = I_p$.

B) $\forall p \in \mathbb{N}, K_r = K_{r+p}$, *en effet* :

Raisonnons par récurrence sur p :

Pour p=0, c'est clair ($K_r = K_{r+0}$).

Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $K_r = K_{r+p}$, et montrons que $K_r = K_{r+p+1}$:

Pour l'inclusion : $K_r \subset K_{r+p+1}$:

On a $K_r = K_{r+p}$ *et* $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$ *d'après* 1)

D'où $K_r \subset K_{r+p+1}$.

Pour l'inclusion : $K_{r+p+1} \subset K_r$:

On a :

$$\begin{aligned} x \in K_{r+p+1} &\Rightarrow u^{r+p+1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow u^{r+1}\left(u^p(x)\right) = 0 \\ &\Rightarrow u^r\left(u^p(x)\right) = 0 \ (car\, K_r = K_{r+1}) \\ &\Rightarrow u^{r+p}(x) = 0 \\ &\Rightarrow x \in K_{r+p} \end{aligned}$$

C) Pour $I_r = I_{r+p}$: on procède comme en **A)** ci-dessus toujours via le théorèmes du rang.

3) c) Montrons que $E = K_r \oplus I_r$ (idée classique !)

Il suffit de montrer que $K_r \cap I_r = \{0\}$, car dans ce cas on aura :

$$\begin{aligned} \dim(K_r \oplus I_r) &= \dim(K_r) + \dim(I_r) \ (\textit{sont en somme directe}) \\ &= \dim(E) \ (\textit{thémorème du rang}) \end{aligned}$$

D'où $E = K_r \oplus I_r$ (rappel : un sous-esp de E de même dimension que E coïncide avec E).

Montrons maintenant que $K_r \cap I_r = \{0\}$. On a :2

$$x \in K_r \cap I_r \Rightarrow \begin{cases} u^r(x) = 0 \\ \exists t \in E \,/\, x = u^r(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^r(u^r(t)) = 0$$

$$\Rightarrow u^{2r}(t) = 0$$

$$\Rightarrow t \in K_{2r}$$

$$\Rightarrow t \in K_r \ (car\ K_r = K_{r+r}\ \ d'après\ 3)b))$$

$$\Rightarrow u^r(t) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0\ (car\ x = u^r(t))$$

Fin et bon courage !