$\boxed{\textit{Problème}}$

Topologie de R

Partie 1

Soit θ une partie de $\mathbb{R}$. θ est dite **ouvert** de $\mathbb{R}$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\begin{cases} \theta = \varnothing \\ \forall x \in \theta, \exists \varepsilon \succ 0 / \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\subset \theta \end{cases}$$

1) Soit $a \prec b \in \mathbb{R}$. Montrer que les parties suivantes sont des ouverts de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$,]a,b[et]- ∞,a[.
2) Parmi les parties suivantes, lesquelles sont-elles des ouverts ? $\mathbb{Q}$, $\left]1,2\right]$, *et* $\{a\}$ où a est un réel quelconque.

   Justifier vos réponses.
3) Montrer que la réunion de deux ouverts non vides de $\mathbb{R}$ est un ouvert .

Partie 2

Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite **fermé** de $\mathbb{R}$ si et seulement si F^C est un ouvert de $\mathbb{R}$.
F^C désigne le complémentaire de F dans $\mathbb{R}$.

1) $\varnothing$ *et* $\mathbb{R}$ sont-ils des fermés de $\mathbb{R}$? justifier vos réponses.
2) Monter que les intervalles [a , b] et [a ,+ ∞ [sont des fermés de $\mathbb{R}$.
3) Montrer que l'intersection de deux fermés non vides de $\mathbb{R}$ est un fermé.

Partie 3

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit x un réel.
On dit que x est **adhérent** à A si et ssi : $\forall \varepsilon \succ 0, \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\cap A \neq \varnothing$.

$\overline{A}$ désigne l'ensemble des points adhérents à A .

1) Montrer que :
   i) $A \subset \overline{A}$.
   ii) Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ alors : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
2) On pose A = [1 , 2[.

Montrer que 2 est adhérent à A alors que $\frac{1}{2}$ ne l'est pas.

3) Montrer que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
4) Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
   Montrer que sup(A) et inf (A) appartiennent à $\overline{A}$.

Fin & bon courage