EXERCICE :

Définition d'une suite de Cauchy :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si et seulemet si* :
$\forall \varepsilon \succ 0 \ , \exists N \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall p \geq N, \ \forall q \geq N \ , | \ u_p - u_q \ | \leq \varepsilon$

1) Montrer que :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de Cauchy*

On admet qu'on a l'équivalence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de Cauchy*

Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

3) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. (donc divergente).

4) Montrer cette fois-ci que $(H_n)_{n\geq 1}$ est divergent en raisonnant par l'absurde, et en utilisant 2).

5) a) Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} H_n$.

6) a) Montrer que : $\forall x \succ -1 \ , \ \ln(1+x) \leq x$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n \geq \ln(n+1)$

c) Retrouver le résultat de 5) b).

Fin