Petites Mines 2005

Dérivabilité et Suites

PROBLÈME

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Obtenir l'ensemble de définition D de f.

A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?

A - 3) Justifier que f est de classe C^1 sur $[0\,;1[$.

A - 4) Dresser le tableau de variations de f.
On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B - 3) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

B - 4) Enoncer l'inégalité des accroissements finis.

B - 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \dfrac{1}{4^n}$.

B - 6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x\ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D\setminus\{0\}$, $g'(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ avec $h(x) = \ln(x) + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
Etudier les variations de g.

C - 2) Déterminer la limite de g en 1.

C - 3) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f.
Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

Fin