Suites réelles.

Problème

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x+1)=f(x)+1$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note f^n la composée n fois de f ; **c.à.d** $\begin{cases} f^0=I_E \\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ f^{n+1}=fof^n \end{cases}$.

Noter que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ f^{n+1}=\underbrace{fofo...of}_{n\ fois}$.

Pour $x\in\mathbb{R}\ et\ n\in\mathbb{N}^*$, on note : $u_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(f^n(x)-x\right)$.

Partie I :

1) Sans justification, compléter $f^m of^n=f^{\cdots}, où\ m,n\in\mathbb{N}$.

Définition d'une suite de Cauchy :
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si et seulemet si* :
$\forall\varepsilon\succ 0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N}\ ,\ \ \forall p\geq N,\ \forall q\geq N\ ,\lvert u_p-u_q\rvert\leq\varepsilon$

2) Montrer que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ converge\Rightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ de\ Cauchy$$

<u>On admet qu'on a l'équivalence</u> : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ converge\Leftrightarrow(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ de\ Cauchy$

Notons $H_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\ ,\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}^*$.

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, H_{2n}-H_n\geq\dfrac{1}{2}$.

4) En déduire que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. (donc divergente).

5) Montrer cette fois-ci que $(H_n)_{n\geq 1}$ est divergent en raisonnant par l'absurde, et en utilisant 3).

6) a) Etudier la monotonie de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}H_n$.

7) a) Montrer que : $\forall x\succ -1\ ,\ \ln(1+x)\leq x$

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, H_n\geq\ln(n+1)$

c) Retrouver le résultat de 6)b).

Partie II :

1)a) Soient $x\in\mathbb{R}\ et\ n\in\mathbb{N}$.

Montrer que : $f^n(x+1)=f^n(x)+1$.

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'application f^n est strictement croissante.

c) Soit $n \geq 1$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \leq y \prec x+1$.

c)1) Montrer que $0 \leq f^n(y) - f^n(x) \prec 1$.

c)2) En déduire $|u_n(y) - u_n(x)| \prec \dfrac{1}{n}$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, $f^n(x+k) - f^n(x) = k$

Indice *: Utiliser 1)a) et une somme télescopique.*

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $f^n(x+k) - f^n(x) = k$.

c) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x \leq y - k \prec x+1$$

d) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \geq 1, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |u_n(y) - u_n(x)| \prec \frac{1}{n}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient n *et* $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u_n\left(f^{jn}(x)\right) = u_{kn}(x)$$

b) Déduire de 3)a) et 2) que :

$$|u_{kn}(x) - u_n(x)| \prec \frac{1}{n}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient p *et* $q \in \mathbb{N}^*$. Déduire de 3)b) que :

$$|u_p(x) - u_q(x)| \prec \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

5) a) Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(u_n(x)\right)_n$ est une suite de Cauchy.

Notons $\alpha(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant 2)d), montrer que l'application α ainsi définie est constante.

c) En déduire que :

$$\exists c \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = c$$