Petites Mines 2008

Problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier non nul, a et b sont deux nombres réels.
La notation $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et ayant un degré inférieur ou égal à n.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi_n(P) = (X-a)(X-b)P' - n\big(X - \frac{a+b}{2}\big)P$$

Partie A : Etude de φ_1

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 1$. On pose donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X] \ , \ \varphi_1(P) = (X-a)(X-b)P' - \big(X - \frac{a+b}{2}\big)P$$

1. Démontrer que φ_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$.

2. Soit $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer $M_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que φ_1 soit bijective.

4. On suppose, dans cette question seulement, que $a \neq b$.

(a). Démontrer que la famille $\mathcal{B} = \{X-a, X-b\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.

(b). Calculer $\varphi_1(X-a)$ et $\varphi_1(X-b)$ puis déduire $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1)$.

(c). Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$. Déterminer de même la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}$, notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(d). Donner, sans démonstration, une égalité reliant les matrices M, M_1, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}$.

(e). Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer M^p puis en déduire, grâce à la question 4.(d), une expression de M_1^p (on donnera l'expression de chacun des coefficients de cette matrice).

5. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble $\Gamma = \{\alpha I_2 + \beta M_1 + \gamma M_1^2 + \delta M_1^3 \ , \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\}$.

(a). Démontrer que Γ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b). Prouver que les matrices M_1^2 et M_1^3 sont des combinaisons linéaires de M_1 et I_2.

(c). Déterminer une base de Γ.

6. On suppose dans cette question que $a = 4$ et $b = 2$. En utilisant les résultats de la question 5.(b), déterminer l'application φ_1^2. En déduire la nature de φ_1 et préciser ses éléments caractéristiques (on donnera une base de chacun des deux espaces vectoriels concernés).

Partie B : Quelques généralités sur φ_n

7. Démontrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On se propose dans cette question de déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$.
On pose $\alpha = \max(a, b)$ et on considère l'intervalle $I =]\alpha, +\infty[$.

(a). Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x-(a+b)}{x^2-(a+b)x+ab}$ est continue sur I.

(b). Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

(c). Résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle (E) :

$$y' - \frac{nx - n\frac{a+b}{2}}{(x-a)(x-b)}\,y = 0$$

(d). On suppose que n est pair et on écrit $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p})$.

(e). On suppose maintenant que n est impair et on écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Déduire de la question 8.(c) une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi_{2p+1})$ (On pourra discuter suivant les valeurs de a et b).

Fin énoncé