# Problème :

**Etude d'une fonction**

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{x}-1 & \text{si } x\in\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

On rappelle que : $\ln(1+x)\underset{x\to0}{=}x-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$

1. Compléter : $\ln(1+2x)\underset{x\to0}{=}\ldots-\ldots+o\left(x^2\right)$

2. (a) Montrer que $f$ est continue sur son ensemble de définition $\left]\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$
   (b) Montrer que $f$ est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
   (c) Étudier les variations de $f$.
   On montrera en particulier que $f$ s'annule en un unique point $\alpha$

**Étude d'une suite convergeant vers $\alpha$**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0>0$ et pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ :

$$u_{n+1}=\ln(1+2u_n)=g(u_n)$$

3. Vérifier que $u_n$ est bien défini pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.
4. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite $L$ ?
5. (a) On suppose que $u_0$ est dans l'intervalle $]0,\alpha]$. Montrer que, alors, pour tout $n$, $u_n$ est dans l'intervalle $]0,\alpha]$. Puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers $\alpha$.
   (b) Montrer, de manière analogue, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\alpha$ si on suppose $u_0$ dans $]\alpha,+\infty[$.
6. On pose $u_0=1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ : $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   (b) Au vu de cette majoration, à partir de quel rang $n$ est-on sûr que $u_n$ représente une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près ?

# Un peu d'informatique:

Grâce à Maple on trouve qu'une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-10}$ près est 1,256364886.
Ecrire un algorithme qui permet de déterminer le premier rang n tel que $u_n$ représente une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-4}$ près. Traduiser-le en langage C.
( Comparer avec la valeur grossière trouvée ci-dessus! )
Indication: penser à la boucle TANT QUE