Polynôme de Tchebychev

On rappelle que toute fonction réelle f continue sur $[-1,1]$ est bornée car continue sur un segment, on convient alors de noter $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ dont l'existence dans $\mathbb{R}$ est assurée par l'argument précédent.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1.a Simplifier $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$.
Représenter sur un même graphique ces applications.

1.b Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in [-1,1]$:

$$f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$$

1.c En déduire qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = f_n(x)$$

Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

2.a Quel est le degré de T_n ?
Quel est son coefficient dominant ?

2.b Déterminer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1,1]$.
Combien y en a-t-il ?
Comment justifier que celles-ci sont simples et qu'il n'y en a pas d'autres ?

2.c Etudier la parité du polynôme T_n en fonction de la parité de l'entier n.

3.a Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

3.b En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \le 1 \Leftrightarrow |T_n(x)| \le 1$.

On suppose désormais que n est un entier naturel non nul.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|T_n(x)| = 1$. On précisera le nombre de racines distinctes et la position relative des racines des équations $T_n(x) = 1$ et $T_n(x) = -1$.

5. On pose $\tilde{T}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ et on note P_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ de degré exactement égal à n. Il est entendu que $\tilde{T}_n \in P_n$.

5.a Calculer $\|\tilde{T}_n\|$.
On désire établir que $\tilde{T}_n$ est un polynôme de P tel que la quantité $\|\tilde{T}_n\|$ soit minimale. Pour cela on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe P polynôme appartenant à P_n tel que $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

5.b On pose $D = \tilde{T}_n - P$. Que dire du degré de D ?

5.c Etudier le signe de $D\left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ et conclure.