# Calcul de la limite d'une somme

*Partie I*

On définit la suite réelle $(u_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1.a Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

1.b Etablir $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

1.c Déterminer la limite de $(u_n)$.

2. On introduit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = u_n - \ln(n+1)$ et $b_n = u_n - \ln n$.

2.a Montrer que $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \ln(1+x) \leq x$.

2.b En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

2.c Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.

On note $\gamma$ leur limite commune (appelée constante d'Euler).

2.d Justifier la relation $u_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

*Partie II*

On définit deux suites réelles $(v_n)$ et $(S_n)$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{v_k}$.

1.a Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3v_n + \frac{n(3n+5)}{2}$.

1.b En déduire une expression factorisée du terme général de $(v_n)$.

2.a Déterminer des réels $a, b, c$ tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.

2.b Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = u_{2n+1} - \frac{1}{2} u_n - 1$.

2.c Obtenir un expression de $S_n$ à l'aide de termes de la suite $(u_n)$.

3. Déterminer la limite de $(S_n)$.