Algèbre linéaire : Pont vers la Spé

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$.

Notons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

→ $P_A(\lambda)$ s'appelle : « le polynôme caractéristique de A ».

→ Les racines du polynôme P_A sont : « Les valeurs propres de A ».

→ L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle : « le spectre de A ». Il se note $Sp(A)$.

→ Si $\alpha \in Sp(A)$, on note $E_\alpha = \ker(A - \alpha I_n)$. C'est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre α.

1°) M. que :

i) $\lambda \in Sp(A) \iff \left(\exists X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \,/\, A \cdot X_0 = \lambda \cdot X_0\right)$

ii) si A et B sont deux matrices semblables alors :

a) $P_A = P_B$

b) $S_p(A) = S_p(B)$

iii) Ecrire $\dim(E_\alpha)$ en fonction n et $rg(A - \alpha I_n)$

2°) On pose dans cette question :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $P_A(\lambda)$

b) Déterminer les valeurs propres de A

c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.

Soit S la famille réunion des bases des sous-espaces propres de A.

Soit B_C la base canonique de $M_{31}(\mathbb{R})$.

d) Vérifier que S est une base de $M_{31}(\mathbb{R})$.

Notons P la matrice de passage de la base B_C à la base S.

e) Calculer P^{-1}.

f) Ecrire A en fonction de P et D,

où $D = \mathrm{diag}(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 1 & 0 \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

g) En déduire A^n sous forme de tableau matriciel, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

h) Considérons les trois suites réelles (x_n), (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1 ; y_0 = 0, z_0 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n - 3z_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède le terme général de chacune de ces suites.

3°) Répondre aux questions dans 2°/, pour chacun des cas suivants :

3-a) $A = \begin{pmatrix} -14 & -8 & 5 \\ 18 & 11 & -6 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

3-b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3-c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$