$\boxed{\textbf{Exercice}}$ (Noyaux et images itérés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera

$$I_p = \operatorname{Im} u^p \quad \text{et} \quad K_p = \operatorname{Ker} u^p$$

1. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad K_p \subset K_{p+1} \quad \text{et} \quad I_{p+1} \subset I_p$$
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad I_p \quad \text{et} \quad K_p$
3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.
   (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
   (b) Montrer qu'alors $I_r = I_{r+1}$ et que $\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad K_r = K_{r+p} \quad \text{et} \quad I_r = I_{r+p}$
   (c) Montrer que $\qquad E = K_r \oplus I_r$